



Deux Propriétés des Arbres Binaires Ordonnés Stricts

CHRISTIANE POUPARD

We enumerate the strict ordinate binary trees according to two parameters: the direct antecedent of the greatest vertex and the vertex which is at the end of the lower sequence of vertices. A similar study concerning André's trees had led us to Entringer's integers.

1. Dans un précédent article nous nous étions intéressé aux répartitions des arbres binaires ordonnés (ou arbres d'André) en fonction du sommet antécédent du plus grand sommet ou de l'extrémité de la chaîne inférieure.

Rappelons qu'un arbre d'André est un arbre dont les sommets forment un ensemble fini totalement ordonné $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en général noté $\{1, 2, \dots, n\}$ et qui satisfait aux conditions suivantes:

- (i) le sommet 1 est de degré 1 ou 2;
- (ii) tous les sommets sont de degré 1, 2 ou 3;
- (iii) sur toute chaîne issue de sommet 1, les sommets se présentent dans un ordre croissant.

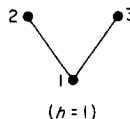
Rappelons également quelques définitions. Dans un arbre d'André:

- (1) les sommets de degré 3, ainsi que le sommet 1 (ou 'racine') s'il est de degré 2, seront dits bifurcants.
- (2) Un sommet a est antécédent (resp. conséquent) d'un sommet b s'il existe une chaîne croissante (resp. décroissante) de a vers b .
- (3) Un sommet a est antécédent direct (ou conséquent direct) d'un sommet b si la chaîne ab comporte la seule arête ab .
- (4) La chaîne inférieure est la chaîne construite à partir du sommet 1 en choisissant (lorsqu'il y a un choix à effectuer) le plus petit conséquent direct.

Ces deux répartitions conduisaient à la décomposition d'Entringer des nombres dits parfois d'Euler.

Nous étudierons ici les répartitions des deux mêmes paramètres descriptifs pour une classe plus limitée d'arbres à savoir ceux des arbres binaires ordonnés dont tous les sommets sont bifurcants ou pendants. Nous appellerons de tels arbres des arbres binaires ordonnés stricts (a.b.o.s.).

Nous pouvons remarquer que tout a.b.o.s. a nécessairement h sommets bifurcants et $h + 1$ sommets pendants, donc au total un nombre impair de sommets. C'est trivialement vrai pour les arbres:



On peut ensuite raisonner par récurrence. En effet tout a.b.o.s. a pour racine 1 qui est un sommet bifurcant; les autres sommets se répartissent en deux a.b.o.s. P et Q , ayant le premier p sommets bifurcants et $p + 1$ sommets pendants, le second q sommets bifurcants et $q + 1$ sommets pendants. Il y a donc au total $p + q + 1$ sommets bifurcants et $p + q + 2$ sommets pendants ($h = p + q + 1$). Les sommets de P et Q définissent sur $\{2, 3, \dots, 2h + 1\}$ deux classes complémentaires de cardinaux respectifs $2p + 1$ et $2q + 1$, qui peuvent être spécifiées de $\binom{2h}{2p+1}$ manières si le couple (p, q) , avec

$p + q = h - 1$ est lui-même spécifié. Il en résulte que si l'on note D_{2h+1} le nombre total d'a.b.o.s. de $2h + 1$ sommets, on a

$$2D_{2h+1} = \sum_{\substack{(p,q) \\ \text{avec } p+q=h-1}} \binom{2h}{2p+1} D_{2p+1} D_{2q+1}$$

(le coefficient 2 qui apparaît dans le premier membre est dû au fait que les deux couples (p, q) et (q, p) donnent le même a.b.o.s.).

Ainsi, si l'on appelle θ la fonction génératrice de la suite de terme général u_n défini par

$$u_{2h} = 0, \quad u_{2h+1} = D_{2h+1} \quad \text{pour } h \geq 0$$

et, en tenant compte du fait que $D_1 = 1$, on a l'équation différentielle

$$2\theta' - 2 = \theta^2 \quad (1)$$

qui par intégration donne

$$\theta(x) = \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Les nombres D_{2h+1} ($h \geq 0$) sont donc, à un facteur 2^h près les nombres dits 'tangents'

	D_1	D_3	D_5	D_7	D_9	\dots
	1	1	4	34	496	\dots

Nous utiliserons dans ce qui suit la notation plus simple $d_h = D_{2h+1}$, et noterons \mathcal{D}_h l'ensemble des a.b.o.s. de $2h + 1$ sommets.

Nous noterons a_h^k ($h \geq 1$, $-(h-1) \leq k \leq h$) le nombre d'arbres de \mathcal{D}_h dans lesquels l'antécédent direct de $2h + 1$ est $h + k$. Nous poserons par convention

$$a_0^0 = 1, \quad a_0^k = 0 \quad \text{pour } k \neq 0 \quad \text{et} \quad a_h^{-h} \quad \text{pour } h \neq 0.$$

Nous noterons d'autre part b_h^k ($h \geq 0$, $-h \leq k \leq h$) le nombre d'arbres de \mathcal{D}_h dans lesquels l'extrémité de la chaîne inférieure est $h + k + 1$.

Afin d'énoncer les résultats à établir nous commencerons par introduire un tableau de nombres d_h^k ($h \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$) construit à partir des relations

$$d_h^k = 0 \quad \text{pour } h \geq 1, |k| \geq h,$$

$$d_0^0 = 1,$$

$$d_h^{-(h-1)} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} d_{h-1}^k \quad \text{pour } h \geq 2,$$

$$d_h^k = 2d_h^{k-1} - 2d_{h-1}^{k-1} - d_h^{k-2} \quad \text{pour } h \geq 2, -(h-2) \leq k \leq h-1.$$

Le tableau des nombres d_h^k commence ainsi:

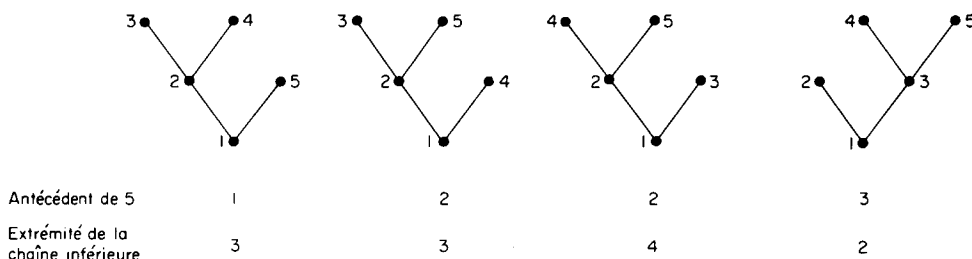
	-3	-2	-1	0	1	2	3	
			0	1	0			
		0	1	2	1	0		
	0	4	8	10	8	4	0	
0	34	68	94	104	94	68	34	0

Il résulte de la définition de ce tableau que chacune de ses lignes est symétrique par rapport à la colonne 0.

Notre propos consistera à démontrer que pour $h \geq 1$, $-(h-1) \leq k \leq h-1$:

$$a_h^k = b_h^k = d_h^k. \quad (2)$$

Dans la figure ci-dessous, on vérifie ces égalités pour les arbres dénombrés par d_2 :



Pour la suite il sera plus commode de présenter les nombres précédemment introduits dans un tableau carré dans lequel le terme δ_i^j ($i \geq 0, j \geq 0$) de la ligne i et de la colonne j est ainsi défini:

$$\delta_0^0 = 1, \quad (3)$$

$$\delta_i^0 = 0, \quad \forall i \geq 1, \quad \delta_0^j = 0, \quad \forall j \geq 1,$$

$$\delta_i^j = \delta_{i-1}^{j-1} + \frac{1}{2}[\delta_{i+1}^{j-1} + \delta_{i-1}^{j+1}], \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1, \quad (4)$$

$$(\delta_i^j \neq 0 \Rightarrow i \text{ et } j \text{ sont de même parité; } \delta_i^j = \delta_j^i).$$

Le tableau des nombres δ_i^j ($i \geq 0, j \geq 0$) commence ainsi:

δ_i^j	$i=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	4	0	34	
2	0	0	2	0	8	0	68		
3	0	1	0	10	0	34			
4	0	0	8	0	104				
5	0	4	0	34					
6	0	0	68						
7	0	34							
8	0								

Les égalités (2) peuvent se reformuler alors ainsi: pour $h \geq 0$, $-h \leq k \leq h$

$$a_h^k = b_h^k = \delta_{h-k}^{h+k}. \quad (5)$$

Pour $h=0$ ceci est vérifié puisque:

$$a_0^0 = b_0^0 = \delta_0^0 = 1,$$

et il en est de même si $h \geq 1$, $|k| = h$.

En effet,

$$a_h^{-h} = b_h^{-h} = \delta_{2h}^0 = 0 \quad \text{et} \quad a_h^h = b_h^h = \delta_0^{2h} = 0.$$

Afin de les établir pour $h \geq 1$, $-(h-1) \leq k \leq h-1$, nous montrerons d'abord la relation de récurrence suivante:

$$\delta_{h-k}^{h+k} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{h-k}{2\lambda+1} d_{\lambda} \sum_{j=0}^{h+k-1} \delta_{2(h-\lambda-1)-j}^j. \quad (6)$$

Les égalités (5) résulteront du double fait que les nombres $a_h^k (h \geq 1, -(h-1) \leq k \leq h-1)$ d'une part et $b_h^k (h \geq 1, -(h-1) \leq k \leq h-1)$ d'autre part satisferont à des récurrences analogues.

2. Pour $k = -(h-1)$ la relation (6) se réduit à:

$$\delta_{2h-1}^1 = d_{h-1} \quad (7)$$

Pour démontrer (7) introduisons la fonction génératrice de Blissard Z à deux variables x et y qui correspond au tableau des nombres $\delta_i^j (i \geq 0, j \geq 0)$:

$$Z(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \delta_i^j \frac{x^i y^j}{i! j!}.$$

Cette fonction satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante:

$$2 \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - Z \right] = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}. \quad (8)$$

Ceci se constate en multipliant les deux membres de (4) par

$$\frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \frac{y^{j-1}}{(j-1)!}$$

et en sommant par rapport à (i, j) .

De plus par suite de (3), Z doit se réduire à la constante 1 si $x = 0$ ou si $y = 0$.

A partir de ces deux remarques, il est facile de montrer que Z a l'expression remarquable suivante:

$$Z(x, y) = \cos \frac{x-y}{\sqrt{2}} / \cos \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

De ceci on déduit, en calculant $\partial Z / \partial y$ puis en faisant $y = 0$, que la colonne $j = 1$ du tableau des nombres $\delta_i^j (i \geq 0, j \geq 0)$ a pour fonction génératrice de Blissard:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \delta_{2h+1}^1 \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}} = \theta(x).$$

La relation (7) est ainsi établie.

Pour $-(h-2) \leq k \leq h-1$, on est assuré $h - \lambda - 1 \geq 1$ donc que $\delta_{2(h-\lambda-1)}^0 = 0$; l'égalité (6) se réduit alors à:

$$\delta_{h-k}^{h+k} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{h-k}{2\lambda+1} \right) d_{\lambda} \sum_{j=1}^{h+k-1} \delta_{2(h-\lambda-1)-j}^j. \quad (9)$$

Pour la démontrer nous écrivons la fonction Z sous la forme:

$$Z(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{y^j}{j!},$$

où C_j est la fonction, de x , génératrice de Blissard de la colonne j du tableau des nombres $\delta_i^j (i \geq 0, j \geq 0)$.

L'équation (8) peut alors s'exprimer par la récurrence du second ordre

$$-C_j + 2C'_j - C''_{j-2} = 2C_{j-2} \quad (10)$$

qui sachant que $C_0 = 1$ et $C_1(x) = \theta(x)$, permet le calcul de tous les C_j de proche en proche.

On démontre, pour $j \geq 1$, que

$$C_j = \frac{\theta^{(j)}\theta}{\theta'}. \quad (11)$$

L'expression (11) donne bien $C_1 = \theta$ et $C_2 = \theta^2$ (comme il résulte immédiatement de (10) pour $j = 2$) et pour justifier (11) dans tous les cas il suffit d'utiliser les relations (10) et (1)

Posons $S_j = \theta^{(j)}/\theta'$. Alors

$$S_j - S'_{j-1} = C_{j-1}. \quad (12)$$

Par addition membre à membre des résultats de $j - 1$ dérivations successives d'égalités déduites de (12) en abaissant les indices d'une unité pour chacune des dérivations, on obtient:

$$S_j = \theta \sum_{l=1}^{j-1} C_l^{(j-l-1)},$$

et par suite

$$C_j = \theta \sum_{l=1}^{j-1} C_l^{(j-l-1)},$$

donc en particulier $C_{h+k} = \theta \sum_{l=1}^{h+k-1} C_l^{(h+k-l-1)}$.

La relation (9) est celle qui exprime dans le développement de C_{h+k} , l'égalité des coefficients de $x^{h-k}/(h-k)!$.

3. Montrons à présent que les nombres $a_h^k (h \geq 1, -(h-1) \leq k \leq h-1)$ vérifient la relation de récurrence suivante:

$$a_h^k = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{h-k}{2\lambda+1} d_{\lambda} \sum_{j=0}^{h+k-1} a_{h-\lambda-1}^{j-(h-\lambda-1)}. \quad (13)$$

Pour $k = -(h-1)$ cette égalité est vérifiée puisque

$$a_h^{-(h-1)} = d_{h-1}.$$

Pour $k \geq -(h-2)$ on est assuré que $h - \lambda - 1 \geq 1$ donc que $a_{h-\lambda-1}^{j-(h-\lambda-1)} = 0$ l'égalité (13) se réduit alors à:

$$a_h^k = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{h-k}{2\lambda+1} d_{\lambda} \sum_{j=1}^{h+k-1} a_{h-\lambda-1}^{j-(h-\lambda-1)}. \quad (14)$$

Pour un a.b.o.s. construit sur $\{1, \dots, 2h+1\}$ dans lequel l'antécédent direct de $2h+1$ est $h+k$ ($-(h-2) \leq k \leq h-1$), considérons la répartition suivante des sommets en trois classes: une classe I_1 constituée des deux sommets $2h+1$ et $h+k$, une classe I_2 constituée des sommets conséquents de $h+k$ à l'exception du sommet $2h+1$ et une troisième classe I_3 regroupant les autres sommets.

A cette répartition des sommets en trois classes correspondent trois sous-arbres A_1, A_2 et A_3 .

On vérifie alors que pour λ tel que

$$0 \leq \lambda \leq \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor$$

et pour j tel que $1 \leq j \leq h+k-1$, si l'on se donne:

- (1) un sous-ensemble de $2\lambda+1$ termes de l'ensemble $\{h+k+1, \dots, 2h\}$;
- (2) un a.b.o.s. de $2\lambda+1$ sommets; et
- (3) un a.b.o.s. de $2h-2\lambda-1$ sommets dans lequel l'antécédent direct de $2h-2\lambda-j$

est j , cela permet de définir un a.b.o.s. et un seul sur $\{1, \dots, 2h-1\}$ dont l'antécédent direct de $2h+1$ est $h+k$.

Il y a $\binom{h-k}{2\lambda+1}$ sous-ensembles de $2\lambda+1$ termes de l'ensemble $\{h+k+1, \dots, 2h\}$, d_λ a.b.o.s. de $2\lambda+1$ sommets et $a_{h-\lambda-1}^{j-(h-\lambda-1)}$ a.b.o.s. de $2h-2\lambda-1$ sommets dans lesquels l'antécédent direct de $2h-2\lambda-1$ est j .

Le relation (14) et aussi par conséquent la relation (13) sont ainsi établies.

4. Il reste à montrer que les nombres b_h^k ($h \geq 1$, $-(h-1) \leq k \leq h-1$) vérifient la même récurrence que les nombres a_h^k c'est-à-dire que

$$b_h^k = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{h-k}{2\lambda+1} d_\lambda \sum_{j=0}^{h+k-1} b_{h-\lambda-1}^{j-(h-\lambda-1)}. \quad (15)$$

Pour un a.b.o.s. construit sur $\{1, \dots, 2h+1\}$ dans lequel l'extrémité de la chaîne inférieure est $h+k+1$, considérons la répartition suivante des sommets en trois classes: une classe Γ'_1 constituée de seul sommet $h+k+1$, une classe Γ'_2 constituée des sommets autres que $h+k+1$ qui ont pour antécédent $j+1$, et une troisième classe Γ'_3 regroupant tous les autres sommets.

A cette répartition des sommets en trois classes correspondent trois sous-arbres A'_1 , A'_2 et A'_3 . On vérifie que pour λ tel que

$$0 \leq \lambda \leq \left\lfloor \frac{h-k-1}{2} \right\rfloor$$

et pour j tel que $1 \leq j \leq h+k-1$, si l'on se donne:

- (1) un sous-ensemble de $2\lambda+1$ termes de l'ensemble $\{h+k+2, \dots, 2h+1\}$;
- (2) un a.b.o.s. de $2\lambda+1$ sommets; et
- (3) un a.b.o.s. de $2h-2\lambda-1$ sommets dans lequel l'extrémité de la chaîne inférieure est $j+1$, cela permet de définir un a.b.o.s. et un seul sur $\{1, \dots, 2h+1\}$ dans lequel l'extrémité de la chaîne inférieure est $h+k+1$.

On en conclut facilement la relation (15).

BIBLIOGRAPHIE

1. D. André, Développements de $\sec x$ et de $\tan x$, *C.R. Acad. Sci., Paris* **88** (1879), 965-967.
2. D. André, Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl.* **7** (1881), 167-184.
3. R. C. Entringer, A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, *Nieuw. Arch. Wisk.* **14** (1966), 241.
4. D. Foata et M. P. Schützenberger, Nombres d'Euler et permutations alternantes, University of Florida, Gainesville. (Une partie de cet article a été publiée sous le même titre dans J. N. Srivastava *et al.* (eds), *A Survey of Combinatorial Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 173-187.)
5. C. Poupard, De nouvelles interprétations des nombres d'Entringer. *Discr. Math.* **38** (1982), 265-271.

Reçu 27 Octobre 1987

CHRISTIANE POUPARD
Université Pierre et Marie Curie, Paris VI,
France